جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی

مرحله اول

هشتمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۷

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۴۰	۲۰	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۴۰ سؤال چند گزینه‌ای و ۲۰ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

۱- در یک مجموعهٔ تفریحی تمرین تیراندازی در نظر گرفته شده است. با هر بلیط می‌توان ۵ تیر شلیک کرد و به ازای هر تیر که به هدف بخورد، ۲ تیر دیگر جایزه داده می‌شود. علی با یک بلیط ۱۷ شلیک انجام داده است. او چند بار به هدف زده است؟

الف) ۳ بار ب) ۶ بار ج) ۱۲ بار

د) ۱۵ بار هـ) نمی‌توان به صورت یکتا تعیین کرد

۲- یک دانش آموز در چند امتحان هوش صد نمره‌ای شرکت کرده است. پس از آخرین امتحان، دانش آموز با خودش حساب کرد که اگر در آخرین امتحان ۹۷ بگیرم، میانگین نمره‌های من ۹۰ و اگر ۷۳ بگیرم، میانگین ۸۷ خواهد بود. او چند بار امتحان داده است؟

الف) ۴ بار ب) ۵ بار ج) ۶ بار

د) ۷ بار هـ) ۸ بار

۳- یک دنباله از عددها به‌این صورت ساخته می‌شود: عدد اول‌این دنباله برابر با ۱ و پس از آن هر عدد برابر با مجموع عددهای قبل از خودش به اضافهٔ یک است. n امین عنصراین دنباله برابر با چند است؟

الف) n ب) $2n-1$ ج) 2^n-1

د) 2^n هـ) 2^{n-1}

۴- مجموعهٔ $A=\{1,2,\ldots,100\}$ مفروض است.

a) به چند طریق می‌توان دو عدد صحیح از مجموعه A انتخاب کرد که مجموع آن‌ها عددی زوج باشد؟

b) به چند طریق می‌توان دو عدد صحیح از مجموعه A انتخاب کرد که مجموع آن‌ها عددی فرد باشد؟

الف) a: ۲۵۰۰، b: ۲۵۰۰ ب) a: ۲۵۰۰، b: ۲۴۵۰ ج) a: ۲۴۵۰، b: ۲۴۵۰

د) a: ۲۴۵۰، b: ۲۵۰۰ هـ) هیچ‌کدام

۵- به چند طریق می‌توان جدول نیمه پر روبه‌رو را با عددهای ۱ تا ۴ طوری پر کرد که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداشته باشیم؟

۱	۲		
	۱	۲	
		۱	

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲

د) ۳ هـ) ۴

۶- از میان عددهای زیر حداکثر چند عدد را می‌توان انتخاب کرد به صورتی که میانگین عددهای انتخاب شده بزرگ‌تر یا مساوی ۱۵ باشد؟

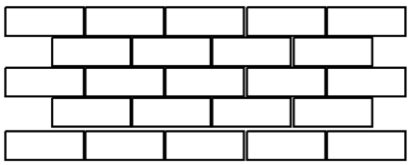
۱۶،۳،۸،۱۸،۱۵،۱۴،۲،۱۶،۴،۵،۹،۱۲،۱۱،۸،۱۲،۲۳،۱۶،۱۵،۱۷،۱۳،۱۴،۲۱

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۵ د) ۱۶ هـ) ۱۷

۷- از مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,6\}$ چند زیرمجموعه می‌توان انتخاب کرد که شامل دو عضو متوالی نباشد؟

الف) ۳۵ ب) ۲۰ ج) ۳۶ د) ۱۵ هـ) ۲۱

۸- یک آجر در صورتی می‌افتد که هیچ آجر یا نیمه آجری در زیر آن نباشد. در شکل روبه‌رو حداکثر چند آجر می‌توان برداشت به صورتی که آجرهای بالایی پایدار بمانند؟ (بدیهی است حق برداشتن آجرهای بالایی را نداریم.)



الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹

د) ۱۰ هـ) ۱۲

۹- یک کشاورز پنج نوع محصول می‌کارد: لوبیا، ذرت، کلم، کدو و نخود. او در هر سال دقیقا سه محصول بر اساس قوانین زیر می‌کارد:

- اگر ذرت بکارد حتما لوبیا هم می‌کارد.
- در هیچ دو سال متوالی‌ای کلم کشت نمی‌کند.
- در هر سال بیش از یکی از محصول‌های سال قبل را دوباره کشت نمی‌کند.

اگر او در سال اولی لوبیا، ذرت و کلم بکارد، در سال سوم کدام یک از ترکیبات زیر را باید بکارد؟

الف) نخود ذرت لوبیا ب) نخود کلم لوبیا ج) کدو نخود لوبیا
د) کدو نخود کلم هـ) کلم ذرت لوبیا

۱۰- ۱۰ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۰ برای پر کردن سطل خود در مقابل یک شیر آب صف کشیده‌اند به محض‌اینکه سطل فردی که در جلوی شیر آب است پر می‌شود، او به کنار می‌رود و نفر بعدی در صف جای او را می‌گیرد. فرض کنید سطل نفر i ام به اندازه‌ای است که پرکردن آن i دقیقه طول می‌کشد. مدت زمانی که نفر i ام در صف و جلوی شیر آب معطل می‌شود تا سطل خود را پر کند را "زمان معطلی" نفر i ام می- نامیم. کدام یک از گزینه‌های زیر دربارهٔ مجموع زمان معطلی ۱۰ نفر درست است؟

الف) افراد می‌توانند به ترتیبی در صف بایستند که مجموع زمان‌های معطلی کمتر از ۳/۵ ساعت باشد.
ب) افراد می‌توانند به ترتیبی در صف بایستند که مجموع زمان‌های معطلی بیشتر از ۷ ساعت باشد.
ج) اگر افراد به ترتیب شماره‌هایشان (نفر ۱ اول) در صف بایستند مجموع زمان‌های معطلی کمینه(حداقل) است.
د) اگر افراد به ترتیب عکس شماره‌هایشان (نفر ۱آخر) در صف بایستند مجموع زمان‌های معطلی کمینه است.
هـ) به هر ترتیبی که افراد در صف بایستند مجموع زمان‌های معطلی تغییر نخواهد کرد.

۱۱- در سرزمین عجایب چهار نوع آدم وجود دارد: درست کارِ باهوش، درست کارِ احمق، تبه کارِ باهوش و تبه کارِ احمق. آدم‌های درست کارِ باهوش و آدم‌های تبه کارِ احمق همواره راست می‌گویند. آدم‌های درست کارِ احمق و آدم‌های تبه کارِ باهوش همواره دروغ می‌گویند. به یک نفر از این سرزمین بر می‌خوریم. او به ما جمله‌ای می‌گوید که با استفاده ازاین جمله می‌توانیم تعیین کنیم که او دقیقاً از چه نوعی است. این جمله چه می‌تواند باشد؟

الف) من احمق هستم ب)من درست کارِ احمق هستم ج)من درست کارِ باهوش هستم
د) من تبه کار هستم هـ) ب و د

۱۲- در سرزمین عجایب، که در مسأله قبل معرفی شد، به دو نفر به نام‌های A و B برخوردم. A به من چیزی گفت که نفهمیدم. B گفت:

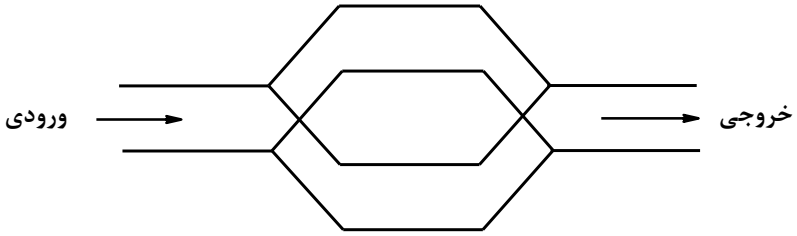
«A می‌گوید که یک درست کارِ احمق یا یک تبه کارِ باهوش است.» A با اعتراض گفت: «من این را نگفتم! » B گفت:« A تبه کار است.» و A درجواب گفت:« B احمق است.» با توجه به‌این مکالمات، A و B هرکدام از چه نوعی هستند؟

الف) با این اطلاعات نمی‌توان به طور دقیق نوع A.B را مشخص کرد.
ب) A یک تبه کارِ احمق و B یک درست کارِ احمق است
ج) A یک درستکار باهوش و B یک تبه کارِ باهوش است.
د) A یک تبه کار احمق و B یک دست کار احمق است.
هـ) A یک درست کار باهوش و B یک درست کار احمق است.

۱۳- شکل مقابل را در نظر بگیرید. مهرهٔ سیاه یک وزیر دراین صفحه است و خانه‌هایی که تهدید می‌کند با دایره‌های توخالی مشخص شده‌اند. حداقل چند و زیر لازم است تا بتوان آن‌ها را طوری در صفحه چید که همهٔ خانه‌ها را تهدید کنند؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴
د) ۵ هـ) ۶

۱۴- در یک ایستگاه قطار، ریل‌ها به شکل زیر هستند:



همهٔ ریل‌ها از سمت چپ به راست یک طرفه هستند. ۵ قطار با شماره‌های ۱ تا۴ به ترتیب: ۱،۲،۳،۴،۵ از ورودی وارداین ریل‌ها می‌شوند. قطارها می‌توانند هر یک از دو راه رسیدن به خروجی را انتخاب کنند و همچنین می‌توانند مدتی روی ریل منتظر بمانند، ولی نمی‌توانند از روی هم عبور کنند. همچنین هر دو ریل به‌اندازهٔ کافی طولانی هستند و می‌توانند هر تعداد لازم قطار را در خود جا دهند. کدام ترتیب برای خروج این قطارها ممکن نیست؟

الف) ۴.۱.۲.۵.۳ ب) ۴.۲.۱.۳.۵ ج) ۲.۳.۴.۵.۱
د) ۲.۳.۵.۱.۴ هـ) ۳.۴.۱.۵.۲

۱۵- n دایره در صفحه رسم شده است. با رسم دایرهٔ بعدی تعداد نواحی‌ایجاد شده در صفحه توسط این دایره‌ها حداکثر چه قدر می‌تواند افزایش می‌یابد؟

الف) n ب) $2n-1$ ج) $n+1$ د) $2n$ هـ) $2n+1$

۱۶- یک دانش آموز به عنوان جریمه باید عددهای بین ۱۰۰۰ و ۱۹۹۹ را دوبه دو باهم جمع کند. (یعنی برای هر x که $1000 \le x \le 1999$ و هر y که $1000 \le y \le 1999$ باید یک بار محاسبه کند) این دانش‌آموز هنگام جمع ده بر یک را منظور نمی‌کند. در چه تعداد از جمع‌ها جواب درست به دست می‌آورد.

الف) $۵۵^۳$ ب) $۴۵^۳$ ج) $۳۶^۳$
د) $\binom{1000}{2} - ۳۶^۳$ هـ) $\binom{1000}{2} - ۵۵^۳$

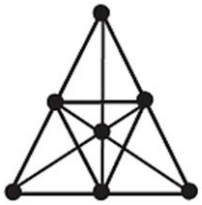
۱۷- در یک روش عدد نویسی، ۱۹ رقم وجود دارد. ارقام ۰ تا ۹ و $\overline{1}$ تا $\overline{9}$ که به ترتیب دارای ارزش ۱- تا ۹- است. مثلا ۱۳۷۶ را می‌توان به صورت $1\overline{4}\overline{2}\overline{4}$ و نیز $1\overline{8}\overline{6}\overline{2}\overline{4}$ نمایش داد.

(چون $۱۳۷۶ = ۱\times۱۰۰۰ + ۴\times۱۰۰ - ۲\times۱۰ - ۴\times۱$ $= ۱\times۱۰۰۰ - ۸\times۱۰۰۰ - ۶\times۱۰۰ - ۲\times۱۰ - ۴\times۱$)

تعداد همهٔ نمایش‌های عدد ۲۵، با حداکثر ۳ رقم چندتاست؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۱۸- در شکل مقابل چند مثلث وجود دارد که هر سه رأس آن نقاط پررنگ است؟

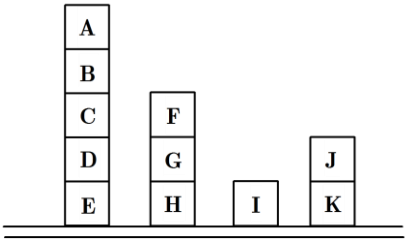


الف) ۱۱ ب) ۱۷
ج) ۲۰ د) ۲۹
هـ) ۳۵

۱۹- از هر یک از شهرهای یک استان، به جز یکی که فقط یک جاده دارد، دقیقا سه جاده خارج شده است. تعداد شهرهای‌این استان کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶
د) ۹ هـ) ۱۳۷۷

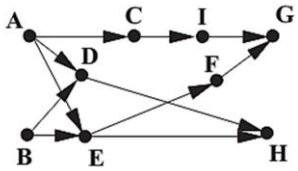
۲۰- تعداد ۱۱ مکعب متمایز مطابق شکل زیر روی یک میز قرار گرفته‌اند. یک روبوت (آدم آهنی) می‌تواند در هر "حرکت" یک مکعب که رویش چیزی قرار ندارد را به روی میز یا روی یک مکعب دیگر منتقل کند. اگر هدف تغییر آرایش مکعب‌ها به یک صورت جدید (دلخواه) باشد، با حداقل چند"حرکت" می‌توانیم مطمئن باشیم که روبوت می‌تواند مکعب‌ها را به هر آرایش جدید (که دلخواه است و مشخص) در آورد؟



الف) ۲۴ ب) ۱۷
ج) ۱۴ د) ۱۱
هـ) ۲۲

۲۱- دانش آموزی برای فارغ التحیل شدن باید ۹ درس را بگذراند. برخی ازاین درسها پیش نیاز هم هستند که‌این روابط پیش نیازی به صورت « A ●⟶ ● B » نمایش داده می‌شوند؛ به‌این معنی که a پیش نیاز b است و باید قبل از آن گذرانده شود. شکل زیر روابط پیش نیازی بین ۹ درس را نشان می‌دهد.

اگر این دانش آموز در هر ترم حداکثر سه درس را بگذراند به چند صورت می‌تواند در طی ۴ ترم فارغ التحصیل شود؟



الف) ۱
ب) ۲
ج) ۳
د) ۴
هـ) ۵

۲۲- A یک ماتریس ۱۰×۵ است که مقدار درایه‌های سطر اول آن برابر با یک و مقدار بقیهٔ درایه‌های ستون اول و ستون پنجم آن برابر با صفر است و مقدار بقیهٔ درایه‌های آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$A_{ij} = \frac{۱}{۲}(A_{i-۱,j-۱} + A_{i-۱,j+۱}) \quad , \quad ۲ \le i \le ۱۰ \quad , \quad ۲ \le j \le ۴$$

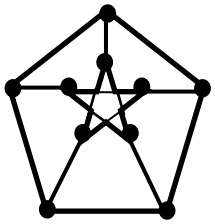
مقدار درایه‌های سطر نهم‌این ماتریس چه خواهد بود؟

الف) $\frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۱۶}$.
ب) $\frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}$.
ج) $\frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴}$.
د) $\frac{۱}{۲^۹}, \frac{۱}{۲^۹}, \frac{۱}{۲^۹}$.
هـ) $\frac{۱}{۲^۹}, \frac{۱}{۲^۸}, \frac{۱}{۲^۹}$.

۲۳- رشتهٔ bababbba را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توانیم دو حرف متوالی از این رشته را با هم جا به جا کنیم. حداقل تعداد مراحل لازم برای این که بتوانیم به رشته‌ای برسیم که در آن همهٔ aها در کنار هم و همهٔ bها نیز در کنار هم قرار گرفته باشند، چند مرحله است؟

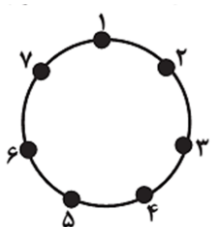
الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ هـ) ۱۲

۲۴- برای رسم شکل مقابل حداقل چند بار باید در حین رسم، قلم را از روی کاغذ برداشت؟



الف) ۳ ب) ۴
ج) ۵ د) ۶
هـ) ۷

۲۵- فرض کنید که شهرهای ۱ تا ۷ دور دایره‌ای به وسیله ۷ جاده مانند شکل مقابل به هم وصل شده‌اند. حداکثر چند جادهٔ دیگر می‌توان بین این شهرها کشید به طوری که هیچ دو جاده‌ای همدیگر را قطع نکنند و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده وجود داشته باشد. (جاده‌ها را می‌توان هم در داخل دایره و هم در خارج آن کشید)



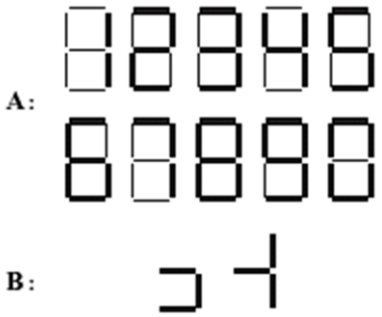
الف) ۶ ب) ۷
ج) ۸ د) ۹
هـ) ۱۰

۲۶- می‌خواهیم در عبارت زیر سه تا از ۶ علامت ضرب را به جمع تبدیل کنیم. به طوری که مقدار A مینیمم شود.

$$A = ۵ \times ۶ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۷ \times ۸$$

الف) ۶۰ ب) ۸۴ ج) ۷۹ د) ۶۹ هـ) ۶۴

۲۷- یک دستگاه نمایش اعداد از ۷ پاره خط تشکیل شده که با روشن کردن چراغ‌های مشخص شده در شکل « A » ارقام ۰ تا ۹ را نشان می‌دهد. برای نمایش اعداد ۰۰ تا ۵۹ از یک نمایش دهندهٔ دو رقمی استفاده می‌کنیم. متأسفانه چراغ بعضی از پاره خطها سوخته است. حال اگر دستگاه شکل « B » را نمایش دهد عدد واقعی آن چند حالت متفاوت دارد؟

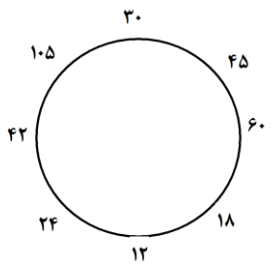


الف) ۸ ب) ۹
ج) ۱۲ د) ۶
هـ) ۲۰

۲۸- شکل مقابل نقشهٔ خیابان‌های یک شهر است. نقاط سیاه مراکز پلیس و خطوط خیابان‌های شهر هستند. به علت ازدیاد مراکز پلیس، وزارت کشور باید مجموعه‌ای از مراکز پلیس شهر را غیر فعال کند به‌گونه‌ای که اولا هیچ خیابانی وجود نداشته باشد که هر دو مرکز پلیس دو سرش غیر فعال شده باشند، و ثانیا اگر حتی یک مرکز دیگر به آن مجموعه اضافه شود آنگاه خیابانی وجود داشته باشد که مراکز پلیس هر دو سرش غیر فعال شده باشد. وزارت کشور به چند طریق می‌تواند این مجموعه را انتخاب کند؟

الف) ۱۲۹ ب) ۷
ج) ۸ د) ۱۲۸
هـ) ۶۴

۲۹- مطابق شکل به ترتیب اعداد ۴۲.۲۴.۱۲.۱۸.۶۰.۴۵.۳۰ و ۱۰۵ دور دایره‌ای نوشته شده‌اند. در هر مرحله بین هر دو عدد روی دایره بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن‌ها را می‌نویسیم و سپس همهٔ اعداد مرحلهٔ قبل را پاک می‌کنیم. اگر ۱۳۷۶ بار عمل فوق را انجام دهیم مجموع اعداد باقی مانده چند است؟



الف) ۳۳۶ ب) ۱۶۸
ج) ۲۴ د) ۷۲
هـ) ۱۰۰

۳۰- میوه فروشی می‌خواهد مقداری میوه برای فروش بخرد. دو نوع میوه موجود است: پرتقال و سیب. قیمت خرید هر کیلو پرتقال ۲۰۰ تومان و قیمت فروش آن ۲۳۰ تومان است. قیمت خرید هر کیلو سیب هم ۱۰۰ تومان و قیمت فروش آن ۱۲۰ تومان است. میوه فروش می‌خواهد حداکثر به اندازهٔ ۱۶۰۰۰ تومان خرید کند. همچنین به خاطر مشکل حمل و نقل، او حداکثر می‌تواند مجموعا به‌اندازهٔ ۱۰۰ کیلو جنس بخرد. حداکثر مقدار سودی که میوه فروش می‌تواند از فروش جنس‌هایی که می‌خرد ببرد چند تومان است؟

الف) ۲۶۰۰ ب) ۲۵۰۰ ج) ۳۰۰۰ د) ۲۴۰۰ هـ) ۲۳۳۳

۳۱- پنج تیم دو به دو فوتبال بازی می‌کنند. در هر بازی برنده ۳ امتیاز و بازنده صفر امتیاز و در صورت تساوی، هر تیم یک امتیاز به دست می‌آورد. در پایان، فدراسیون امتیاز تیم‌ها را اعلام می‌کند. از دنباله‌های زیر کدام می‌توانند دنبالهٔ امتیازات تیم‌ها باشند؟

I) ۱.۱.۶.۹.۱۲ II) ۳.۳.۴.۷.۱۰ III) ۲.۳.۶.۸.۱۰

الف) فقط I ب) فقط I و II ج) فقط I و III
د) فقط II هـ) هر سه

۳۲- وسطهای اضلاع یک مثلث متساوی الأضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی الأضلاع دیگری در وسط آن ایجاد شود. در وسط این مثلث نیز به همان ترتیب مثلث متساوی الأضلاع دیگری ایجاد می‌کنیم و این کار را n بار انجام می‌دهیم. می‌دانیم که در شکل حاصل مجموعا ۴۵ مثلث می‌توان شمرد. n برابر است با:

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ هـ) ۲۲

۳۳- تمام عددهای سه رقمی که رقم صفر ندارند را با هم جمع میزنیم. حاصل جمع در کدام محدوده قرار دارد؟

الف) ۳۲۰۰۰۱ تا ۳۳۰۰۰۰ ب) ۳۸۰۰۰۱ تا ۳۹۰۰۰۰ ج) ۴۰۰۰۰۱ تا ۴۱۰۰۰۰
د) ۴۱۰۰۰۱ تا ۴۲۰۰۰۰ هـ) ۴۳۰۰۰۱ تا ۴۴۰۰۰۰

۳۴- برای ثبت نام در یک مدرسه متقاضی باید سه کار انجام دهد: ملاقات با مدیر، دریافت فرم از دفتر، و دریافت توصیه نامه از معلم A یا B. ترتیب انجام کارها باید به گونه‌ای باشد که قبل از گرفتن فرم، مدیر را ملاقات کرده باشد.

مدیر در روزهای شنبه صبح و سه شنبه بعد از ظهر و چهارشنبه بعد از ظهر حضور دارد. دفتر روزهای سه شنبه صبح چهارشنبه صبح و شنبه بعد از ظهر و پنج شنبه بعد از ظهر باز است. معلم A روزهای دوشنبه صبح و چهارشنبه صبح و معلم B روزهای شنبه صبح و دوشنبه بعد از ظهر حضور دارند.

علی ثبت نام خود را در یک روز کامل کرده است. از جملات زیر کدام‌ها درست‌اند؟

I) توصیه نامه را از معلم A گرفته است.

II) توصیه نامه را از معلم B گرفته است.

III) کلیهٔ مراحل ثبت نام را در صبح انجام داده است.

الف) فقط I ب) فقط II ج) فقط III

د) فقط I و III هـ) فقط II و III

۳۵- در همان مسئله قبل، حامد پس از ملاقات با مدیر، می‌خواهد در یک روز سایر کارها را انجام دهد. این کار در کدام یک از روزهای زیر امکان پذیر است؟

الف) شنبه ب)دوشنبه و چهارشنبه ج)شنبه و دوشنبه

د) شنبه و چهارشنبه هـ) شنبه و دو شنبه و چهارشنبه

۳۶- در جدول رو به رو، یک نفر در ابتدا در خانهٔ ۱ است. حرکت کردن در این جدول بر اساس قواعد زیر است: (منظور از یک حرکت، رفتن از یک خانه به خانهٔ مجاورش است.)

R			R	۲
L	S	L	R	L
	L	S	L	L
۱	R		R	

- اگر به خانه‌ای که در آن R نوشته شده است وارد شود، باید در حرکت بعد به سمت راست بپیچد. (سمت راست و چپ نسبت به مسیر خودش به مسیر خودش محاسبه می‌شود.
- اگر به خانه‌ای که در آن L نوشته شده است وارد شود، باید در حرکت بعد به سمت چپ بپیچد.
- اگر به خانه‌ای که در آن S نوشته شده است وارد شود، باید در حرکت بعد مستقیم به حرکت خود ادامه دهد.
- اگر به خانه‌ای خالی وارد شود، در حرکت بعد می‌تواند به هر یک از چهارخانهٔ مجاورش برود.

توجه کنید که‌این فرد هیچ‌گاه نباید از جدول خارج شود. حداقل تعداد حرکات لازم برای رسیدن به خانهٔ ۲ چندتاست؟

الف) ۷ ب) ۹ ج) ۱۱

د) ۱۳ هـ) ممکن نیست

۳۷- برای نمایش یک عدد فقط مجاز به استفاده از رقم ۱، عمل جمع و توان هستیم. استفاده از پرانتز فقط برای دسته بندی مجاز است. مثلاً $(۱+۱)^{(۱+۱)}+۱$ یک نمایش عدد ۵ است. برای نمایش عدد ۳۵ حداقل چند ۱ لازم است؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ هـ) ۱۳

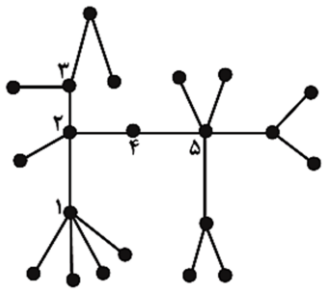
۳۸- قطعه شکلاتی به طول m و به عرض n به صورتی شیاره داده شده که به واحدهای ۱×۱ تقسیم شده است. در صورتی که یک قطعه شکلات را از روی یکی از خطوط عمودی یا افقی به دو قطعه تقسیم کنیم می‌گوییم که آن را «شکسته‌ایم». اگر برای تبدیل قطعهٔ اولیه به قطعات ۱×۱، حداکثر تعداد شکستن لازم را با B و حداقل آن را با b نمایش دهیم، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) $b=mn-۱\ ,\ B=mn$ ب) $b=B=mn-۱$

ج) $b=m+n-۱\ ,\ B=mn-۱$ د) $b=m+n-۱\ ,\ B=mn$

هـ) $b=m+n-۲\ ,\ B=(m-۱)(n-۱)$

۳۹- نقشهٔ چند روستا و راه‌های بین آن‌ها به صورت روبه‌رو داده شده است. قرار است چاه آبی در یکی از این روستاها برای استفادهٔ مشترک همهٔ آن‌ها ساخته شود. با توجه به این که طول همهٔ راه‌ها مساوی است، چاه در کدام روستا ساخته شود تا مجموع فواصل طی شده از همهٔ روستاها به چاه کمترین باشد؟



الف) ۱ ب) ۲

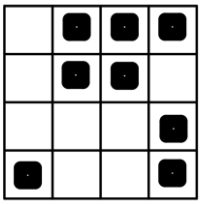
ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۴۰- یک مهرهٔ شاه در صفحهٔ شطرنجی تمام ۸ خانهٔ اطراف خود را تهدید می‌کند. به چند طریق می‌توان ۳ مهرهٔ غیر متمایز شاه را در یک صفحهٔ ۳×۳ قرار داد به قسمی که هیچ‌کدام همدیگر را تهدید نکنند؟

الف) ۵ ب) ۷ ج) ۹ د) ۸ هـ) ۱۰

سؤال‌های بله ـ خیر (۲۰ سؤال)

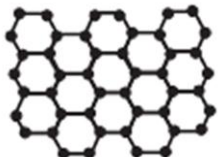
۴۱- خانه‌های جدول مقابل را می‌خواهیم با عددهای ۱ تا ۳ چنان پر کنیم که در هر سطر(وهمچنین در هر ستون) اگر مثلا k تا خانهٔ خالی وجود دارد، عددهای ۱ تا k (البته نه لزوماً به همین ترتیب) قرار بگیرند. آیا این عمل امکان پذیر است؟



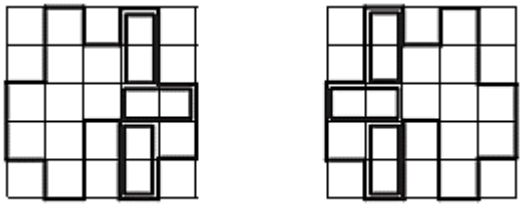
۴۲- چهار نقطهٔ زیر را در نظر بگیرید. دو نفر به نام‌های اکبر و باقر به ترتیب زیر با هم بازی می‌کنند. ابتدا اکبر شروع به بازی می‌کند و پس از آن یک در میان به نوبت بازی می‌کنند. هر یک از دو بازی کن در نوبت خودش بین دو نقطهٔ دلخواه که تا حالا به هم وصل نشده‌اند یک پاره خط راست می‌کشد. اولین کسی که باعث ایجاد یک مثلث در شکل بشود بازنده است. آیا اکبر می‌تواند چنان حرکت کند که همیشه بازی را ببرد؟

۴۳- ۶ سکه در یک ردیف قرار داده شده‌اند. وضعیت پشت و رو بودن هر یک از سکه‌ها دلخواه است. در هر مرحله می‌توانیم ۵ تا ازاین سکه‌ها را به دلخواه انتخاب کرده، هر پنج تا را برگردانیم. آیا با تکرار این عمل می‌توانیم هر ۶ سکه را به طرف پشت برگردانیم؟

۴۴- در شبکهٔ روبه‌رو آیا می‌توانیم از یک رأس (دایره‌های سیاه) شروع کنیم و مسیری را طی کنیم که در آن از هر یک از رأس‌های دیگر دقیقا یک بار بگذریم و دوباره به همان رأس اولیه برسیم؟



۴۵- در شکل «الف» می‌بینید که سه صابونن در دیواره‌ها محصور شده‌اند. می‌خاهیم وضعیت را به حالت «ب» تبدیل کنیم. برای‌این کار حق داریم به صابون‌ها در جهتهای افقی و یا عمودی ضربه بزنیم. صابون‌ها در جهت ضربه حرکت می‌کنند تا به یک مانع (دیوار یا صابون دیگر) برسند و سپس می‌ایستند. دقت کنید که صابون‌ها حق دوران ندارند. آیا می‌توان‌این کار را انجام داد؟



ب الف

۴۶- ۱۳۷۶ سنگریزه و دو بازی‌کن داریم. هر بازی کن در نوبت خود می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۴ سنگریزه برای خود بردارد. کسی که آخرین سنگریزه را بردارد برنده است. ایا فرد دوم می‌تواند طوری بازی کند که حتما برنده شود؟

۴۷- ۵ نفر با وزنهای ۳۰، ۴۰، ۸۰، ۸۰ و ۲۰ کیلوگرم در یک طرف رودخانه ایستاده‌اند و قایقی دارند که ظرفیت آن ۸۰ کیلوگرم است. آیا آن‌ها می‌توانند با استفاده ازاین قایق به سوی دیگر رودخانه برود؟ (در هر بار رد شدن قایق از رودخانه باید حداقل یک نفر برای هدایت آن در قایق باشد)

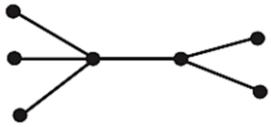
۴۸- در کشوری تعدادی شهر وجود دارد و بعضی از شهرها با جاده به هم متصل شده‌اند. می‌خواهیم به هر یک از این شهرها یک مجموعه از عددهای صحیح را نسبت دهیم، به طوری که مجموعه‌های نسبت داده شده به هر دو شهری که به هم با یک جاده به طور مستقیم متصل‌اند با هم اشتراک ناتهی داشته باشد و اشتراک مجموعه‌های نسبت داده شده به هر دو شهری که با جاده‌ای به صورت مستقیم به هم متصل نیستند، تهی باشد. آیا این کار همواره ممکن است؟

۴۹- یک ردیف از عددهای ۱ تا ۱۰ به ماده شده است. دو عمل زیر را می‌توانیم بر روی هر ردیف انجام دهیم:

- عنصر اول و دوم ردیف را جابه‌جا کنیم.
- عنصر اول ردیف را برداشته، آن را در آخر ردیف قرار دهیم.

آیا با استفاده از دو عمل فوق، می‌توانیم ردیف داده شده را مرتب کنیم؟

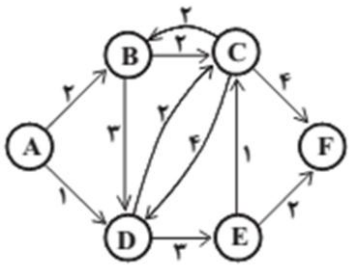
۵۰- آیا می‌توان به رئوس شکل روبه‌رو اعداد از ۰ تا ۶ را طوری نسبت داد که به ازای هر یک از اعداد ۱ تا ۶، پاره خطی وجود داشته باشد که قدر مطلق تفاضل دو سر آن مساوی عدد مورد نظر باشد؟



۵۱- رشتهٔ اعداد طبیعی را از ۱ شروع کرده و باهم جمع می‌زنیم. آیا ممکن است پس از جمع کردن چند عدد، به مجموعی سه رقمی با ارقام یکسان برسیم؟

۵۲- در یک مدرسه میانگین نمرات دانش آموزان سال سوم بیشتر از میانگین نمرات دانش آموزان سال چهارم است. در مدرسهٔ دیگری هم میانگین نمرات دانش آموزان سال سوم بیشتر از میانگین نمرات دانش آموزان سال چهارم است. میانگین دانش آموزان سال سوم و چهارم را در مجموع هر دو مدرسه با هم حساب کرده‌ایم. در اینجا میانگین نمرات دانش آموزان سال چهارم از سوم بیشتر شده است. آیا حتما در محاسبات اشتباه کرده‌ایم؟

۵۳- شهرهای A و B و C و D و E و F در شکل توسط خیابان‌های یک طرفه‌ای که هر یک را با یک پیکان نشان داده‌ایم به هم وصل شده‌اند. مقدار مصرف بنزین برای عبور از یک خیابان عددی است که روی آن خیابان نوشته شده است. آیا می‌توان سفری را از رأس A شروع کرد و با عبور از خیابان‌ها و مصرف دقیقا ۲۱ واحد بنزین به شهر F رسید؟



۵۴- جدول ۳×۳ی رو به رو با عددهای صحیح پر شده است. در هر مرحله می‌توانیم به دو خانهٔ مجاور دراین جدول یک عدد صحیح اضافه نموده و یا از آن‌ها یک عدد صحیح را کم کنیم. آیا با این روش می‌توان خانه‌های این جدول را صفر نمود؟

۰	۳	۲
۴	۵	۲
۴	۷	۳

۵۵- در یک میهمانی ۷ نفر حضور دارند. می‌دانیم که هر نفر حداقل با سه نفر دیگر آشناست. آیا همواره می‌توان این ۷ نفر را به‌گونه‌ای دور یک میز نشاند که هر دو نفری که در کنار هم نشسته‌اند با هم آشنا باشند؟

۵۶- دو گروه از افراد که هرگروه دارای سه نفر است و برای هر فرد یک مجموعهٔ ۲ عضوی از عددهای طبیعی اختصاص داده شده است را در نظر می‌گیریم. هر فرد می‌تواند یکی از این دو عدد اختصاص یافته به خود را انتخاب کند. می‌خواهیم انتخاب‌ها چنان باشد که هیچ دو نفری از دو گروه متفاوت عددهای یکسانی را انتخاب نکرده باشند. آیا این کار همواره ممکن است؟

۵۷- ۲۰ تیم به صورت دوره‌ای باهم بازی کرده‌اند. یعنی هر دو تیمی با هم دقیقا یک بازی انجام داده‌اند. یک ترتیب دلخواه ازاین تیم‌ها را در نظر می‌گیریم. اگر دراین ترتیب دو تیم متوالی $X.Y$ (به ترتیب) باشند که X از Y باخته باشد، جای X و Y را عوض می‌کنیم. آیا این عمل می‌تواند تا بی نهایت ادامه داشته باشد؟

۵۸- یک ماشین در اختیار داردیم که یک عدد را به عنوان ورودی دریافت می‌کند و پس از دریافت این عدد، یک عدد را به عنوان خروجی می‌دهد. می‌دانیم که گزاره‌های زیر برقرارند. منظور از $\overline{MN}$ در اینجا این است که دو عدد M و N را پشت سر هم بنویسیم.

برای مثال اگر $M=۲۷۳$ و $N=۱۲۳۴$ باشد، $\overline{MN}=۲۷۳۱۲۳۴$ است.

- اگر ورودی، $\overline{۲N}$ باشد، خروجی N خواهد بود.
- اگر خروجی ماشین به ازای ورودی M، عدد N باشد، خروجی ماشین به ازای وردی $\overline{۳M}$ ، عدد $\overline{N۲N}$ است.

آیا عددی وجود دارد که اگر آن را به عنوان ورودی به ماشین بدهیم، همان عدد را به عنوان خروجی بگیریم؟

۵۹- با توجه به تعاریف مسأله قبل، آیا عددی مانند N وجود دارد که اگر آن را به عنوان ورودی به ماشین بدهیم، عدد $\overline{۷N}$ را به عنوان خروجی دریافت کنیم؟

۶۰- مداری داریم که سه عدد A و B و C را به عنوان ورودی دریافت کرده، مقدار $A\times B+C$ را به عنوان خروجی می‌دهد. به تعداد کافی از این مدار در اختیار داریم.ایا می‌توانیم مقدار

$$a_۷x^۷+a_۶x^۶+a_۵x^۵+a_۴x^۴+a_۳x^۳+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$$

را به کمک ۷ عدد ازاین مدارها محاسبه کنیم؟

«پاسخ تشریحی هشتمین المپیاد کامپیوتر»

۱- علی ۱۲ تیر بیش از سهمیهٔ خود شلیک کرده است و چون با به هدف زدن یک تیر دو تیر جایزه می‌گیرد، بنابراین علی ۶ بار به هدف زده است.

۲- تعداد امتحان ها را n و مجموع نمرات غیر از نمرهٔ امتحان آخر را x در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dfrac{x+۹۷}{n}=۹۰ \\ \dfrac{x+۷۳}{n}=۸۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹۰n-x=۹۷ \\ ۸۷n-x=۷۳ \end{cases} \Rightarrow ۳n=۲۴ \Rightarrow n=۸$$

۳- دنبالهٔ خواسته شده به صورت $۱,۲,۴,۸,۱۶,\ldots$ می‌باشد، یادآوری می‌شود که:

$$x^{۰}+x^{۱}+x^{۲}+\ldots+x^{n-۱}=\frac{x^{n}-۱}{x-۱}$$

۴- a) دو عدد منتخب یا هر دو زوج هستند و یا هر دو نفر، بنابراین:

$$a=\begin{bmatrix}۵۰\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵۰\\۲\end{bmatrix}=۲۴۵۰$$

b) یکی از اعدا منتخب زوج و دیگری فرد است، بنابراین:

$$b=\begin{bmatrix}۵۰\\۱\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}۵۰\\۱\end{bmatrix}=۲۵۰۰$$

۵- اگر خانهٔ * از جدول شماره ۱ را با ۳ پر کنیم آنگاه جدول به شکل جدول شماره ۲ و اگر آن خانه را با ۴ پر کنیم آنگاه آن جدول به شکل جدول شماره ۳ پرخواهد شد.

۱	۲		
*	۱	۲	
		۱	

شماره ۱

۱	۲	۴	۳
۳	۱	۲	۴
۴	۳	۱	۲
۲	۴	۳	۱

شماره ۲

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

شماره ۳

۶- تعداد اعداد بزرگتر یا مساوی ۱۵ در اعداد داده شده ۹ عدد می‌باشد که همهٔ آنها را انتخاب می‌کنیم. مجموع اعداد منتخب از میانگین ۱۵ به اندازهٔ $۱+۳+۰+۱+۸+۱+۰+۲+۶$ یعنی ۲۲ واحد بیشتر دارد پس از اعداد باقی‌مانده نیز تعدادی (از بزرگ به کوچک) چنان انتخاب می‌کنیم که مجموع کمبودهای آنها از ۱۵ کمتر یا مساوی ۲۲ باشد. به این منظور اعداد زیر را نیز انتخاب می‌کنیم:

$۱۴,۱۴,۱۳,۱۲,۱۲,۱۱,۹$

مجموع کمبودهای اعداد انتخاب شده از ۱۵ برابر ۲۰ می‌باشد که اگر عدد بعدی یعنی ۸ نیز انتخاب شود، آنگاه مجموع این کمبودها برابر ۲۷ شده و از ۲۲ بزرگتر می‌شود، بنابراین علاوه بر ۹ عدد ذکر شده، ۷ عدد دیگر نیز می‌توانیم انتخاب کنیم.

۷- **راه حل اول:** زیرمجموعه‌های ۰ و ۱ عضوی همگی مطلوب هستند. به غیر از زیرمجموعه‌های $\{۱,۲\},\{۲,۳\},\{۳,۴\},\{۴,۵\},\{۵,۶\}$ همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی مطلوب هستند.

از بین زیرمجموعه‌های سه عضوی فقط زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,۵\},\{۱,۳,۶\},\{۱,۴,۶\},\{۲,۴,۶\}$ مطلوب هستند. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب برابر $۴+[\ ۵-\begin{bmatrix}۶\\۰\end{bmatrix}]+\begin{bmatrix}۶\\۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶\\۰\end{bmatrix}$ می‌باشد.

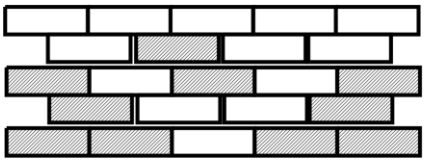
راه حل دوم: مسأله را در حالت کلی برای مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,\ldots,n\}$ حل می‌کنیم. تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب را در این حالت a_n در نظر می‌گیریم و این زیرمجموعه‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

I) آنهایی که n را دارند. هیچ یک از این زیرمجموعه‌ها $n-۱$ را ندارند و مابقی اعضای آنها اعضای مطلوبی از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ldots,n-۲\}$ می‌باشد که تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $a_{n-۲}$ می‌باشد.

II) آنهایی که n را ندارند. در این حالت هریک از زیرمجموعه‌ها، زیر مجموعه‌های مطلوبی از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ldots,n-۱\}$ می‌باشد که تعداد این زیرمجموعه برابر $a_{n-۱}$ می‌باشد.

بنابراین رابطهٔ $a_n=a_{n-۱}+a_{n-۲}$ برقرار است که چون $a_۱=۲$, $a_۲=۳$ مقادیر $a_۳,a_۴,a_۵,a_۶$ به ترتیب برابر ۵، ۸، ۱۳ و ۲۱ به دست می‌آیند.

۸- ماخ



آجرهای برداشته شده در شکل مقابل هاشور خورده است.
هر آجر حداکثر دو آجر از ردیف بالایی خود را محافظت می‌کند، چون از ردیف بالا حق حذف هیچ آجری را نداریم پس در ردیف دوم از بالا حداقل سه آجر باری محافظت از پنج آجر بالایی باقی می‌ماند. برای محافظت از سه آجر، در ردیف دوم از بالا حداقل دو آجر باقی می‌ماند و چون این دو آجر پیش هم نیستند در ردیف پایینی آن یعنی ردیف چهارم حداقل دو آجر باید باقی باند. در ردیف آخر نیز باقی ماندن حداقل یک آجر الزامی است. پس تعداد کل آجرهای باقی مانده حداقل ۱+۲+۲+۳+۵ یعنی ۱۳ بوده و در نتیجه تعداد آجرهای حذف شده حداکثر ۱۰ می‌تواند باشد.

۹- ماخ

چون در هر سال حداکثر یکی از محصولات سال قبل کشت می‌شود، بنابراین در هر سال هر دو محصول کاشته نشده در سال قبل کشت می‌شود. بنابراین محصولات کاشته شده در سال دوم کدو، نخود و لوبیا و محصولات کاشته شده در سال سوم ذرت، کلم و لوبیا می‌باشد.

۱۰- ماخ

اگر افراد به ترتیب شماره‌هایشان در صف قرار گیرند آنگاه مجموع زمان‌های معطلی برابر:

$۱۰\times۱+۹\times۲+۸\times۳+\ldots+۱\times۱۰$

یعنی ۲۱۸ دقیقه و اگر به ترتیب عکس شماره‌هایشان در صف قرار گیرند آنگاه مجموع زمان‌های معطلی برابر

$۱۰\times۱۰+۹\times۹+۸\times۸+\ldots+۱\times۱$

یعنی ۳۸۵ دقیقه خواهد بود. حالت اول حداقل مجموع زمان‌های معطلی را دارد زیرا اگر نفر i ام بعد از نفر j ام $(i<j)$ در صف قرار گیرند، با جابه‌جایی آن دو نفر مجموع کل معطلی به اندازه $j-i$ دقیقه کاهش می‌یابد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که حالت دوم نیز حداکثر مجموع زمان‌های معطلی را دارد.

۱۱- ماخ

جملهٔ «من احمق هستم» را هر دو نفر تبه کارِ باهوش و تبه کارِ احمق می‌توانند بگویند. جملهٔ «من درست کارِ احمق هستم» را فقط تبه کارِ باهوش می‌تواند بگوید.
جملهٔ « من درست کارِ باهوش هستم» را هر سه نفر درست کارِ باهوش، درست کارِ احمق و تبه کارِ باهوش می‌توانند بگویند.
و بالاخره جملهٔ «من تبه کار هستم» را هر دو نفر درست کارِ احمق و تبه کارِ احمق می‌توانند بگویند.

۱۲- از دو مکالمهٔ اول معلوم می‌شود که یکی از دو نفر a و b راستگو و دیگری دروغگوست. اگر b راستگو باشد پس گفتهٔ او صحت دارد یعنی a گفته است: «من یک درست کارِ احمق یا یک تبه کارِ باهوش هستم»، که اگر a دروغگو باشد این جمله را نمی‌تواند بیان کند. بنابراین a راستگو و b دروغگو است. چون a راستگو است پس جملهٔ او یعنی «b احمق است» صحت دارد، یعنی b احمق درست‌کار می‌باشد (به خاطر دروغگو بودنش). و چون b دروغگو است پس جملهٔ او یعنی «a تبه کار است» نادرست بوده و a درست‌کار است. چون ax راستگو است پس او درست‌کارِ باهوش می‌باشد.

۱۳- هر وزیر حداکثر دو خانه از خانه‌های غیر ستون خود را تهدید می‌کند، چون در هر ستون پنج خانه وجود دارد، پس در صورت موجود بودن وزیر در ستون‌های i و j خانه‌ای از ستون k تهدید نشده باقی می‌ماند، بنابراین وجود حداقل ۳ وزیر الزامی است. با سه وزیر مطابق شکل مقابل می‌توان تمام خانه‌ها را تهدید کرد:

۱۴- در دو ریل بالا و پایین دنباله‌ای نزولی وجود دارد، پس دنبالهٔ خروجی در درون خون دو دنبالهٔ نزولی دارد. دنبالهٔ الف را به دنباله‌های نزولی «۱,۲,۳» و «۴,۵» دنبالهٔ ج را به دنباله‌های نزولی «۱» و «۲,۳,۴,۵» دنبالهٔ د را به دنباله‌ای نزولی «۱,۴» و «۲,۳,۵» و بالاخره دنبالهٔ هـ را به دنباله‌های نزولی «۱,۲» و «۱,۴,۵» تجزی می‌کنیم. ولی گزینهٔ ب امکان تجزیه شدن به دو دنبالهٔ نزولی را ندارد.

۱۵- **راه حل اول:** با رسم یک دایره از یک نقطهٔ تقاطع تا تقاطع بعدی یک و فقط یک ناحیه اضافه می‌شود. چون هر دایره، دایرهٔ دیگر را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند پس تعداد کل نقاط تقاطع دایرهٔ جدید با دایره‌های قبل حداکثر $2n$ شده و در نتیجه تعداد نواحی ایجاد شده حداکثر $2n$ می‌باشد.

راه حل دوم: یک دایره صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند که با رسم دایرهٔ دوم به صورت متقاطع با دایره اول تعداد نواحی برابر ۴ شده و تعداد آن نواحی از ۲ به ۴ تغییر می‌کند. بنابراین به ازای $n=1$ جواب مورد نظر ۲ شده و گزینه‌های الف و هـ رد می‌شوند. با رسم دایره سوم به صورت متقاطع با هر دو دایرهٔ قبل تعداد نواحی از ۴ به ۸ افزایش می‌یابد یعنی به ازای $n=2$ جواب مورد نظر ۴ می‌شود، بنابراین گزینه‌های ب و ج نیز رد می‌شوند.

۱۶- اگر رقم یکان x برابر ۰ باشد، آنگاه رقم یکان y، ده حالت، اگر رقم یکان x برابر ۱ باشد، آنگاه رقم یکان y، نه حالت(غیر از ۹)، اگر رقم یکان x برابر ۲ باشد، آنگاه رقم یکان y، هشت حالت، ... و بالاخره اگر رقم یکان x برابر ۹ باشد، آنگاه رقم یکان y، یک حالت (فقط ۰) می‌تواند داشته باشد پس رقم یکان دو عدد بر روی هم $1+\ldots+8+9+10$ یعنی ۵۵ حالت، به همین ترتیب رقم دهگان و صدگان دو عدد هریک برروی هم ۵۵ حالت و رقم هزارگان نیز فقط یک حالتِ «۱،۱» را دارا هستند. بنابراین تعداد اعداد مطلوب برابر 55^3 می‌باشد.

۱۷- چهار نمایش مورد نظر به شکل‌های $25,\overline{35},\overline{175},\overline{185}$ می‌باشد.

۱۸- به ازای انتخاب هر سه نقطه یک مثلث پدید می‌آید مگر آن که آن سه نقطه در یک امتداد باشند. در شکل داده شده شش دستهٔ سه تایی در یک امتداد مشاهده می‌شود، بنابراین تعداد مثلث های مطلوب برابر $\binom{7}{3}-6$ یعنی ۲۹ می‌باشد.

۱۹- تعداد شهرهای استان را n در نظر می‌گیریم، بنابراین تعداد جاده‌ها برابر $\frac{(n-1)\times 3+1}{2}$ یا $\frac{3n-2}{2}$ می‌باشد. شرط لازم برای آن‌که عدد به دست آمده صحیح باشد آن است که n زوج باشد. به ازای $n=4$ به شکل و به ازای $n=6$ به شکل می‌رسیم. برای اینکه سؤال فقط یک گزینهٔ صحیح داشته باشد حدس بر این است که منظور طراح آن بوده است

که بین هیچ دو شهری دو جادهٔ متمایز وجود ندارد یعنی $n = ۴$ نمی‌تواند درست باشد.

۲۰- بدترین حالت این است که همهٔ مکعب‌ها به غیر از مکعب‌های زیری به روی میز منتقل شده و سپس همهٔ آنها در یک ردیف بر روی هم چیده شوند، برای قسمت اول ۷ حرکت و برای قسمت دوم ۱۰ حرکت لازم است.

۲۱- دروس A، C، I و G به ترتیب در ترم‌های اول، دوم، سوم و چهارم گذرانده می‌شوند. دروس B، E و F نیز به ترتیب در ترم‌های اول، دوم و سوم گذرانده می‌شوند. برای دروس H و D سه حالت متفاوت به ترتیب به شکل‌های(دوم، سوم) یا (دوم، چهارم) و یا (سوم،چهارم) می‌تواند وجود داشته باشد.

۲۲- ماتریس مطلوب به شکل مقابل می‌باشد:

۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰
۰	۱/۲	۱	۱/۲	۰
۰	۱/۲	۱/۲	۱/۲	۰
۰	۱/۴	۱/۲	۱/۴	۰
۰	۱/۴	۱/۴	۱/۴	۰
۰	۱/۸	۱/۴	۱/۸	۰
۰	۱/۸	۱/۸	۱/۸	۰
۰	۱/۱۶	۱/۸	۱/۱۶	۰
۰	۱/۱۶	۱/۱۶	۱/۱۶	۰

۲۳- برای ساختن رشتهٔ bbbbbaaaa از روی رشتهٔ bababababba، ۹ مرحله لازم است زیرا b ها از سمت چپ به ترتیب از روی ۰، ۱، ۲، ۳ و ۳ عدد a رد شده‌اند که مجموعاً ۹ جابه‌جایی می‌شود. به همین ترتیب معلوم می‌شود که برای ساختن دنبالهٔ aaaabbbbb از روی دنبالهٔ داده شده ۱۱ مرحله لازم است.

۲۴- تعداد پاره‌خط متصل به هر نقطه را درجهٔ آن نقطه می‌نامیم. به ازای هر دو نقطه با درجهٔ فرد یک بار قلم از روی کاغذ برداشته می‌شود، چون تعداد این نقاط ۱۰ می‌باشد پس حداقل چهار بار قلم از روی کاغذ برداشته می‌شود (برداشت آخر از روی کاغذ نباید شمره شود).

۲۵- ابتدا با توجه به قضیهٔ اولر ثابت می‌کنیم تعداد جاده‌های مورد نظر نمی‌تاند بیش از ۸ جاده باشد. قضیهٔ اولر به یکی از دو صورت زیر بیان می‌شود:

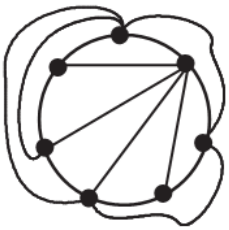
I) اگر v تعداد رئوس، e تعداد یال‌ها و f تعداد وجوه یک چند وجهی باشد آنگاه $e + ۲ = v + f$.

II) اگر v تعداد رئوس، e تعداد یال‌ها و f تعداد نواحی موجود در یک گراف همبند باشد (ناحیهٔ نامحدود خارجی نیز شمرده می‌شود) آنگاه $e+۲=v+f$

هر ناحیه در دور خود حداقل سه یال دارد، بنابراین تعداد یال‌های موجود در دور تمام نواحی حداقل برابر $۳f$ می‌باشد ولی چون هر یال دقیقاً مرز دو ناحیه می‌باشد، با این شمارش هر یک از آنها دو بار شمارش می‌شوند، بنابراین:

$$۲e \geq ۳f \Rightarrow ۲e \geq ۳(e+۲-۷) \Rightarrow e \leq ۱۵$$

چون در شکل داده شده ۷ یال رسم شده پس حداکثر ۸ یال دیگر مطابق شکل مقابل می‌توان رسم کرد:



۲۶- ماخ به نظر می‌رسد که باید علامت ها را یک در میان به جمع تبدیل کرد زیرا در غیر این صورت حداقل دو علامت ضرب پشت سر هم قرار گرفته و عدد به سمت مینیمم شدن سوق پیدا نمی‌کند. بنابراین مینیمم مقدار A برابر $۸+۷\times۲+۳\times۴+۶\times۵$ یعنی ۶۴ خواهد شد.

۲۷- ماخ رقم یکان یکی از چهار حالت ۳، ۴، ۸ یا ۹ و رقم دهگان یکی از دو حالت ۳ یا ۵ را می‌تواند داشته باشد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر ۸ می‌باشد.

۲۸- ماخ اگر مرکز وسطی غیر فعال شود، آنگاه هر ۷ شهر متصل به آن فعال و هر ۷ شهر انتهایی غیر فعال می‌شوند، یعنی در این صورت فقط یک حالت انتخاب وجود دارد.

اگر مرکز وسطی فعال شود، آنگاه هر یک از ۷ شاخه یکی از دو وضعیت ●—○—● یا ●—●—○ را می‌تواند داشته باشد (● نشانهٔ فعال بودن و ○ نشانگر غیر فعال بودن مرکز می‌باشد). از $۲^۷$ حالت ایجاد شده فقط حالتِ مقابل قابل قبول نیست. زیرا با غیر فعال کردن مرکز وسطی خیابانی با دو سر غیر فعال یافت نمی‌شود.

بنابراین تعداد کل حالات برابر $۱-۲^۷+۱$ یعنی ۱۲۸ می‌باشد.

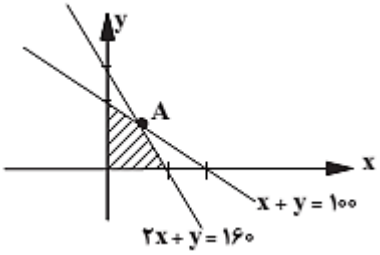
۲۹- ماخ در مرحلهٔ پنجم هر ۸ عدد موجود بر روی دایره برابر ۳ می‌شود که از آن مرحله به بعد وضعیت تغییر نمی‌کند، بنابراین جواب مطلوب برابر ۸×۳ یعنی ۲۴ می‌باشد.

۳۰- ماخ فرض می‌کنیم x کیلو پرتقال و y کیلو سیب خریده باشد. آنگاه:

$$۲x+y \leq ۱۶۰ \quad \text{و} \quad ۲۰۰x+۱۰۰y \leq ۱۶۰۰۰ \quad , \quad x+y \leq ۱۰۰$$

اگر نامعادله‌های فوق را در محورهای مختصات نمایش داده و اشتراک آنها را هاشور بزنیم شکل مقابل به دست می‌آید:

می‌خواهیم $۳۰x+۲۰y$ ماکزیمم شود، خط $۳۰x+۲۰y=k$ را چنان رسم می‌کنیم که از نقطهٔ A بگذرد در این صورت حاصل $۳۰x+۲۰y$ ماکزیمم مقدار خود را خواهد داشت. از تلاقی دو خط $x+y=۱۰۰$ و $۲x+y=۱۶۰$ مختصات نقطهٔ A به صورت(۶۰،۴۰) پیدا می‌شود که دراین حالت حاصل $۳۰x+۲۰y$ برابر ۲۶۰۰ می‌شود.



۳۱- برای هر یک از حالات I و II جدول نتایج به شکل زیر می‌باشد:

	A	B	C	D	E
A		A	A	A	A
B	A		B	B	B
C	A	B		C	C
D	A	B	C		_
E	A	B	C	_	

I

	A	B	C	D	E
A		A	A	A	_
B	A		B	B	_
C	A	B		C	_
D	A	B	C		D
E	_	_	_	D	

II

اگر نتیجهٔ هر مسابقه‌ای برد و باخت باشد، آنگاه مجموعا ۳ امتیاز به تیم‌ها داده می‌شود و چون در کل ۱۰ بازی انجام می‌شود پس در صورت عدم موجود بودن تساوی در بازی‌ها مجموع امتیازات تیم ها ۳۰ می‌شود. مجموع امتیازات حالت III برابر ۲۹ می‌باشد به این معنا که فقط یکی از مسابقات به تساوی کشیده شده است در حالی که تیم آخر دو تساوی دارد(چون دو امتیاز دارد) و این تناقض بیانگر آن است که دنبالهٔ III نمی‌تواند امتیاز تیم‌ها باشد.

۳۲- تعداد مثلث ها برابر $\underbrace{۴+۴+۴+\ldots+۴}_{n\ تا}+۱$ می‌باشد. بنابراین:

$$۱+۴n=۴۵ \quad \Rightarrow \quad n=۱۱$$

۳۳- تعداد اعداد مطلوب $۹\times۹\times۹$ می‌باشد. به خاطر تقارن معلوم می‌شود که $\frac{۱}{۹}$ این اعداد دارای رقم یکان ۱، $\frac{۱}{۹}$ آنها دارای رقم یکان ۲، ... و بالاخره $\frac{۱}{۹}$ آنها دارای رقم یکان ۹ می‌باشند. رقم دهگان و صدگان نیز چنین است، بنابراین:

$$?=(۱+۲+\ldots+۹)\times۸۱+(۱+۲+\ldots+۹)\times۱۰\times۸۱+(۱+۲+\ldots+۹)\times۱۰۰+۸۱=۴۰۴۵۹۵$$

۳۴- با توجه به جدول مقابل معلوم است که او کار خود را در روز شنبه انجام داده است بنابراین فقط گزارهٔ II صحیح است.

	صبح	بعد از ظهر
شنبه	م ـ B	د
یکشنبه		
دوشنبه	A	B
سه شنبه	د	م
چهارشنبه	د ـ A	م
پنج‌شنبه		د

۳۵- با توجه به جدول قبل معلوم می‌شود که یکی از معلم‌ها به همراه دفتردار فقط در روزهای شنبه و چهارشنبه در مدرسه حضور دارند.

۳۶- در جدول مقابل برای رسیدن به خانه b اگر از خانه ۱۳ وارد شویم لازم است به خانهٔ ۱۳ از خانهٔ ۱۴ وارد شویم. برای وارد شدن به خانهٔ ۱۳ از ۱۴ به طوری که به راست بپیچیم باید از خانهٔ ۱۹ وارد شویم. برای اینکه با گردش به چپ از ۱۹ به ۱۴ وارد شویم باید از خانهٔ ۱۸ به خانهٔ ۱۹ وارد شویم و اگر به همین ترتیب ادامه دهیم دنبالهٔ حرکت به شکل زیر خواهد بود که ۱۳ حرکت می‌باشد:

۴ R	۵	۱۲	۱۳ R	۲۰ b
۳ L	۶ S	۱۱ L	۱۴ R	۱۹ L
۲	۷ L	۱۰ S	۱۵ L	۱۸ L
۱ a	۸ R	۹	۱۶ R	۱۷

۱ ← ۲ ← ۷۶ ← ۵ ← ۱۲ ← ۱۱ ← ۱۴ ← ۱۵ ← ۱۸ ← ۱۹ ← ۱۴ ← ۱۳ ← ۲۰

اگر برای ورود به خانهٔ b از خانهٔ ۱۹ وارد شویم آنگاه دنبالهٔ حرکت به شکل زیر خواهد بود که ۱۱ حرکت می‌باشد:

۱ ← ۲ ← ۷ ← ۶ ← ۵ ← ۶ ← ۷ ← ۱۰ ← ۱۵ ← ۱۴ ← ۱۹ ← ۲۰

۳۷- ماخ بهترین حالت نمایش به شکل زیر می‌باشد:

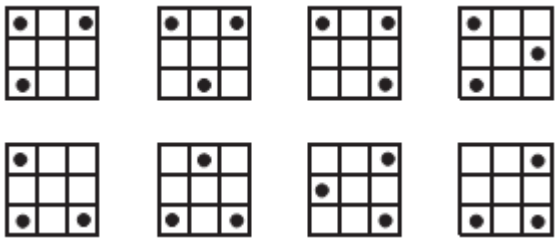
$$(۱+۱)^{(۱+۱+۱+۱+۱)}+(۱+۱+۱)$$

۳۸- ماخ اگر $m=n=۱$ آنگاه $b=B=۰$ که با جاگذاری گزینه‌های الف، ج و د رد می‌شوند. اگر $m=۱$ و $n=۲$ آنگاه $b=B=۱$ که با جاگذاری گزینهٔ هـ نیز رد می‌شود.

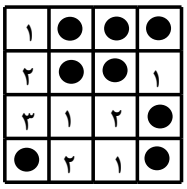
۳۹- ماخ با فرض این که چاه در روستای ۱ باشد با انتقال چاه از روستای ۱ به ۲ راه ۵ روستا هر کدام یک واحد اضافه شده ولی در عوض راه ۱۶ روستا هرکدام یک واحد کم خواهد شد، بنابراین روستای ۲ بهتر از روستای ۱ است. با انتقال چاه از روستای ۲ به روستای ۳ راه ۴

روستا هرکدام یک واحد کم شده ولی در عوض راه ۱۷ روستا هرکدام واحد اضافه می‌شود، بنابراین روستای ۲ بهتر از روستای ۳ می‌باشد. با انتقال چاه از روستای ۲ به روستای ۴ راه ۱۱ روستا هرکدام یک واحد اضافه شده ولی در عوض راه ۱۰ روستا هرکدام یک واحد کم خواهد شد، بنابراین روستای ۲ بهتر از روستای ۴ است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که روستای ۲ از روستای ۵ نیز بهتر است.

۴۰- ماخ تمام حالات در اشکال نیز نمایش داده شده‌اند:



۴۱- ماخ جدول مطلوب مطابق شکل زیر می‌باشد:



۴۲- ماخ کافی است باقر در هر مرحله دو نقطهٔ x و y را به هم وصل کند که در آن x و y دو رأسی است که اکبر در آن مرحله غیر آن دو رأس را به هم وصل کرده است.

۴۳- ماخ I) اگر پنج سکه به رو باشند با انتخاب آن پنج سکه و برگرداندن آنها، به شش سکهٔ پشت خواهیم رسید.

II) اگر دو سکه به رو و چهار سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب چهار سکهٔ پشت و یک سکهٔ رو و برگرداندن آنها، پنج سکهٔ رو و یک سکهٔ پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت I عمل می‌کنیم.

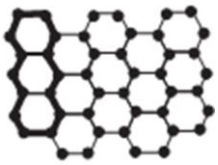
III) اگر سه سکه به رو و سه سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب سه سکهٔ رو و دو سکهٔ پشت و برگرداندن آنها، به دو سکهٔ رو و چهار سکهٔ پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت II عمل می‌کنیم.

IV) اگر چهار سکه به رو و دو سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب دو سکهٔ پشت و سه سکهٔ رو و برگرداندن آنها، به سه سکهٔ رو سه سکهٔ پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت III عمل می‌کنیم.

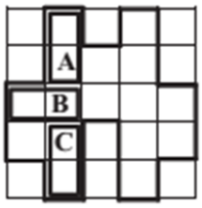
V) اگر یک سکه به رو و پنج سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب سکهٔ رو و چهار سکه پشت و برگرداندن آنها، به چهار سکهٔ رو و دو سکهٔ پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت IV مثل می‌کنیم.

VI) اگر شش سکه به رو باشند آنگاه با انتخاب پنج سکهٔ رو و برگرداندن آنها، به پنج سکهٔ پشت و یک سکهٔ رو خواهیم رسید، سپس مثل حالت V عمل می‌کنیم.

۴۴- هر دو رأسی که فقط شامل دو یال باشند، هر دو یالشان در مسیر شرکت می‌کند، بنابراین قسمت پر رنگ قسمتی از مسیر مطلوب می‌باشد و اما هر نقطه‌ای نقطهٔ شروع باشد راه برگشتی برای آن وجود ندارد.



۴۵- الگوریتم حرکات به شکل زیر می‌باشد:



B به راست – B به پایین

A به پایین – A به راست

A به بالا- C به بالا – B به بالا

B به چپ- B به پایین

C به پایین- A به پایین- C به راست- C به بالا

B به بالا – B به راست

۴۶- در حالت کلی اگر تعداد سنگریزه‌ها مضربی از ۳ باشد نفر دوم و در غیر این صورت نفر اول می‌تواند برنده باشد. اگر تعداد سنگریزه‌ها $3n$ باشد و نفر اول ۱ یا ۴ سنگریزه بردارد، نفر دوم با برداشتن ۲ سنگریزه باز تعداد سنگریزه ها را $3k$ نگه داشته و در نهایت برنده می‌شود و اگر نفر اولی ۲ سنگریزه بردارد نفر دوم با برداشتن ۱ سنگریزه باز تعداد سنگریزه‌ها را $3k$ کرده و برنده می‌شود. اگر تعداد سنگریزه‌ها $3k+r$ ($r=1$ یا 2) باشد، آنگاه نفر اول با برداشتن r سنگریزه تعداد سنگریزه‌ها را به $3k$ رسانده و ابتکار عمل را به دست می‌گیرد.

۴۷- الگوریتم حرکت به صورت زیر می‌باشد (در ابتدا فرض می‌کنیم همه در سمت چپ رودخانه باشند):

۲۰ و ۳۰ باهم به سمت راست رفته و ۳۰ پیاده شده و ۲۰ برمی‌گردد.

۲۰ و ۴۰ باهم به سمت راست رفته و ۴۰ پیاده شده و ۲۰ برمی‌گردد.

۲۰ در سمت چپ پیاده شده و ۸۰ به سم راست رفته پیاده شده و ۳۰ سوار می‌شود.

۳۰ به سمت چپ آمده، پیاده می‌شود و ۸۰ سوار شده به سمت راست می‌رود.

۸۰ در سمت راست پیاده شده و ۴۰ سوار شده به سمت چپ می‌آید.

۴۰ نفرِ ۲۰ را سوار کرده، به سمت راست آورده، آن را پیاده می‌کند و به سمت چپ برمی‌گردد و نفر ۳۰ را سوار کرده و باهم به سمت راست رفته و در آنجا پیاده می‌شوند.

۴۸- به هر یک از جاده‌ها یک عدد صحیح متمایز از اعداد متناظر به جاده‌های دیگر، نسبت می‌دهیم. کافی است به هر یک از رئوس مجموعه‌ای نسبت دهیم که فقط شامل تمام اعداد متصل به آن رأس باشد.

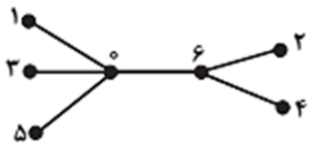
۴۹- با الگوریتم زیر می‌توان جای هر دو عضو دلخواه مانند i و j با فرض اینکه i قبل از j باشد را عوض کرد:

- ابتدا با توجه به عمل دوم تمام اعضای قبل از i را به انتهای دنباله به ترتیب انتقال می‌دهیم.
- با توجه به عمل اول جای i و عضو بعد از آن را عوض کرده و سپس با توجه به عمل دوم آن را به انتهای دنباله انتقال می‌دهیم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که i و j مجاور باشند. در این مرحله خود i را به انتها منتقل می‌کنیم.

- باتوجه به عمل اول جای j و عضو بعد از آن را عوض کرده و سپس با توجه به عمل دوم آن را به انتهای دنباله انتقال می‌دهیم و کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جای i و j پر شود.
- با توجه به عمل دوم تا جای ممکن اعضا را به انتها انتقال می‌دهیم تا ترتیب اولی ظاهر شود با این تفاوت که جای i و j عوض شده باشد.

با الگوریتم بالا ابتدا ۱ را به ابتدا، سپس ۲ را به جایگاه دوم و... انتقال می‌دهیم.

۵۰- یکی از جواب های مطلوب مطابق شکل مقابل باشد:



۵۱- مجموع اعداد ۱ تا n برابر با $\frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد:

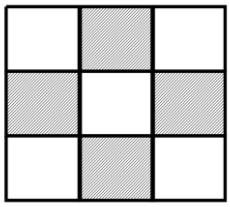
$$\frac{n(n+1)}{2} = \overline{aaa} \quad \Rightarrow \quad n(n+1) = 2 \times 111 \times a = 6 \times 37 \times a$$

با توجه به تساوی فوق و این‌که ۳۷ عددی اول است معلوم می‌شود که $6a$ برابر ۳۶ بوده و در نتیجه برابر ۲ خواهد بود. بنابراین به ازای $n = 36$ مجموع خواسته شده برابر ۶۶۶ می‌شود.

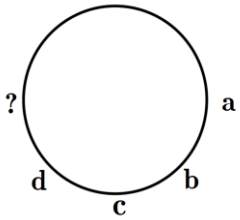
۵۲- مثال مورد نظر به شکل زیر می‌باشد:
در مدرسهٔ اول فقط ۱۰ دانش آموز سال سوم با معدل ۱۶ و ۱۰۰ دانش آموز سال چهارم با معدل ۱۵ موجود باشد. در مدرسهٔ دوم نیز ۱۰ دانش آموز سال سوم با معدل ۱۰ و یک دانش آموز سال چهارم با معدل ۹ موجود باشد. در این صورت معدل دانش آموزان سال سوم برابر ۱۳ و معدل دانش‌آموزان سال چهارم برابر ۱۴/۹۴ خواهد شد.

۵۳- یکی از مسیرهای مطلوب A B C B C B C D E F می‌باشد.

۵۴- اگر جدول را مطابق شکل مقابل شطرنجی کنیم، معلوم می‌شود که در هر مرحله اگر به مجموع اعداد سفید k واحد اضافه شود به مجموع اعداد سیاه نیز k واحد اضافه خواهد شد. در ابتدا مجموع اعداد سفید ۱۴و مجموع اعداد سیاه برابر ۱۶ می‌باشد. بنابراین هرگز آن دو عدد به طور توأم نمی‌توانند صفر شوند.



۵۵- فرض می‌کنیم a با همهٔ افراد، b، c و d دو به دو باهم و e ، f و g نیز دو به دو باهم آشنا باشند و هیچ آشنایی دیگری موجود نباشد. بدون این که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض می‌کنیم سمت چپ a نفرِ b باشد، در این صورت سمت چپ b یا باید c نشسته باشد و یا d. در حالت اول نفر بعدی (نفر چهارم) d و درحالت دوم نفر بعدی c خواهد شد، ولی معلوم است که فردی که با d (یا c) آشنا باشد پیدا نمی‌شود تا در جایگاه پنجم بنشانیم.



۵۶- اگر به اعضای هر دو گروه مجموعه‌های یکسانی مانند نفر اول $\{۱,۲\}$، نفر دوم $\{۱,۳\}$ و نفر سوم $\{۲,۳\}$ اختصاص دهیم آنگاه انتخاب مطلوب ممکن نخواهد بود.

۵۷- در ترتیب مورد نظر تمام زوج‌هایی مانند (x,y) که x از y باخته و در آن ترتیب x قبل از y (نه لزوما بلافاصله) را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم این تعداد زوج عددی محدود است. با عمل اشاره شده در صورت مسأله، در هر مرحله تعداد زوج‌های مورد اشاره یکی کم‌شده و بالاخره بعد از مدتی به صفر خواهد رسید.

۵۸- فرض می‌کنیم $N = ۳$، در این صورت با توجه به گزارهٔ اول معلوم می‌شود که خروجی ماشین برای ورودی ۲۳ عدد ۳ می‌باشد. با توجه به گزارهٔ دوم معلوم می‌شود که خروجی ماشین به ازای ورودی ۳۲۳ عدد ۳۲۳ خواهد شد.

۵۹- اگر ورودی را ۲۷۳ بگیریم با توجه به گزارهٔ اول خروجی ۷۳ می‌شود و با توجه به گزارهٔ دوم به ازای ورودی ۳۲۷۳ خروجی ۷۳۲۷۳ می‌شود که همان خواستهٔ مسأله می‌باشد.

۶۰- ورودی مدار اول به ترتیب $a_۷$ ، x و $a_۶$ می‌باشد.
ورودی مدار دوم به ترتیب خروجی مدار اول، x و $a_۵$ می‌باشد.
ورودی مدار سوم به ترتیب خروجی مدار دوم، x و $a_۴$ می‌باشد.